Operačný program VZDELÁVANIE

Agentúra Ministerstva školstva SR pre štrukturálne fondy EÚ

Európska únia
Európsky sociálny fond

FINANČNÁ MATEMATIKA

ŽILINSKÝ samosprávny kraj
zriaďovateľ

Obchodná akadémia
Radlinského 1725/55
026 01 Dolný Kubín

„Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ“

Táto publikácia bola vytvorená s podporou finančných prostriedkov zo zdrojov **Európskej únie** a štátneho rozpočtu Slovenskej republiky v rámci projektu ***„Učíme inovatívne, kreatívne a hravo, učíme pre život a prax“***, ITMS kód Projektu: 26110130344. Jej cieľom je inovovať školský vzdelávací program a zároveň formy, metódy a obsah vzdelávania s dôrazom na využívanie IKT a kritického myslenia vo vyučovacom procese, a tak pripraviť absolventov Obchodnej akadémie pre potreby trhu práce vo vedomostnej spoločnosti.

Autor publikácie: Mgr. Ján Pilko

Rok vydania: 2011

Vydala Obchodná akadémia Dolný Kubín s prispením Európskeho sociálneho fondu.

OBSAH

1 ÚVOD DO FINANČNEJ MATEMATIKY

1.1 Funkcie

Funkciou z číselnej množiny A do číselnej množiny B nazývame predpis, ktorý každému prvku x z množiny A priradí najviac jeden prvok y z množiny B. Zapisujeme $f: y = f(x)$.

Množinu A všetkých hodnôt premennej x označujeme $D(f)$ a nazývame DEFINIČNÝ OBOR FUNKCIE f. Premennú x nazývame NEZÁVISLÁ PREMENNÁ.

Množinu tých prvkov z množiny B, ku ktorým existuje aspoň jeden taký prvok $x \in A$, že $[x, y] \in f$, nazývame OBOROM HODNÔT FUNKCIE f a označujeme $H(f)$. Premennú y nazývame ZÁVISLÁ PREMENNÁ.

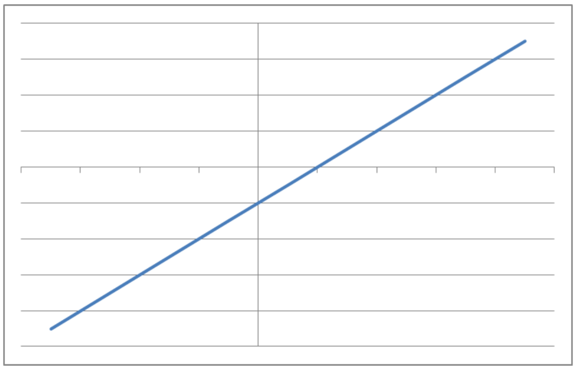
Množina všetkých bodov, ktoré majú súradnice $[x; f(x)]$ v karteziánskej sústave súradníc, nazývame GRAF FUNKCIE.

1.1.1 Lineárna funkcia

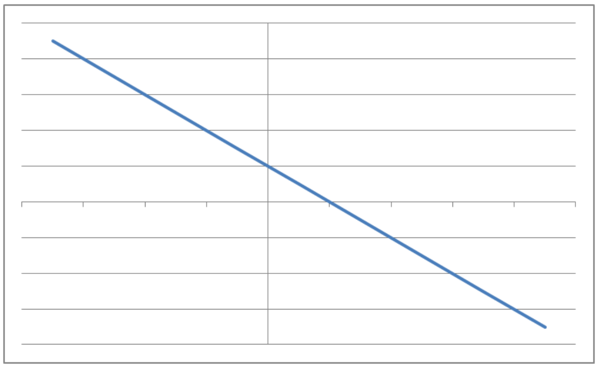
Každá funkcia, ktorá je daná predpisom $f: y = ax + b$, kde $a, b \in R$, sa nazýva LINEÁRNA FUNKCIA.

Grafom lineárnej funkcie je PRIAMKA.

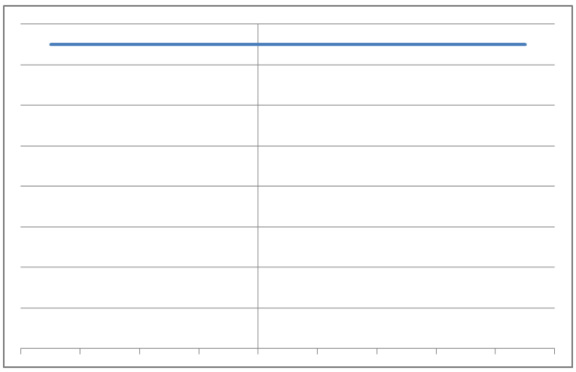
$f: y = ax + b\ ; a > 0$, rastúca funkcia



$f: y = ax + b\ ; a < 0$, klesajúca funkcia



$f: y = ax + b\ ; a = 0$, konštantná funkcia



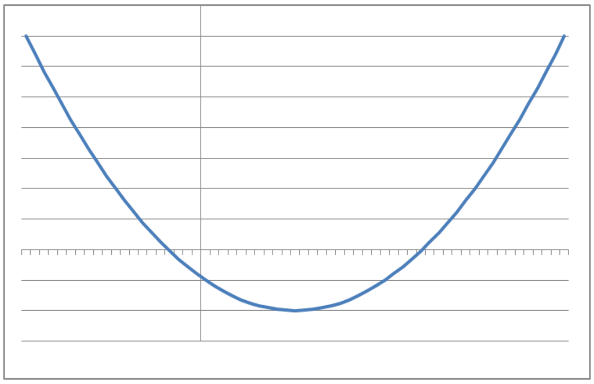
Ak sa $b = 0$, tak $f: y = ax$. Takáto funkcia sa nazýva PRIAMA ÚMERNOSŤ.

1.1.2 Kvadratická funkcia

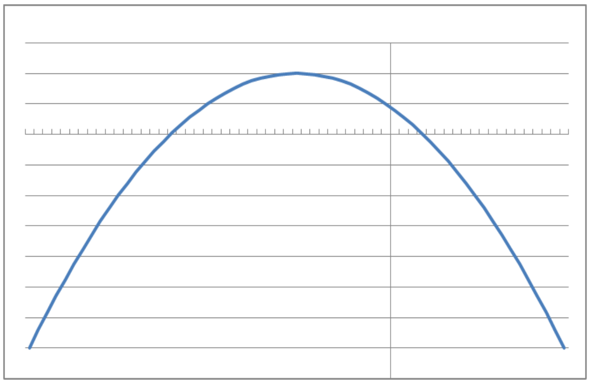
Každá funkcia, ktorá je daná predpisom $f: y = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in R$ a $a \neq 0$, sa nazýva KVADRATICKÁ FUNKCIA.

Graf kvadratickej funkcie je PARABOLA. Os paraboly je rovnobežná s osou y. Priesečník osi paraboly s parabolou sa nazýva VRCHOL PARABOLY. Vrchol paraboly má súradnice $\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$.

$f: y = ax^2 + bx + c\ , a > 0$



$f: y = ax^2 + bx + c\ , a < 0$

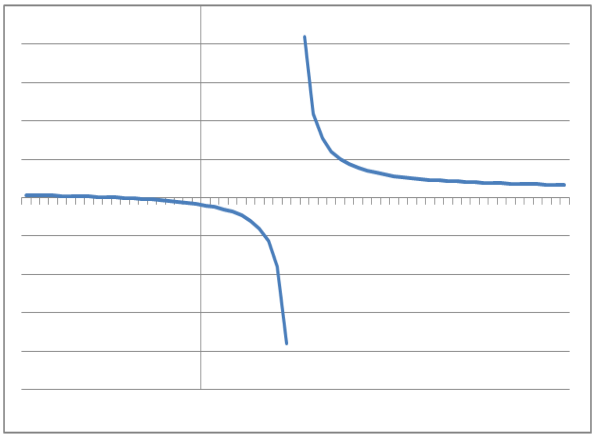


1.1.3 Lineárna lomená funkcia

Každá funkcia, ktorá je daná predpisom $f: y = \frac{ax+b}{cx+d}\ ; a, b, c, d \in R; c \neq 0; ad \neq bc$, sa nazýva LINEÁRNA LOMENÁ FUNKCIA.

Grafom lineárnej lomenej funkcie je ROVNOOSÁ HYPERBOLA, ktorá má stred v bode $\left[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right]$, jej asymptoty prechádzajú týmto stredom a sú rovnobežné so súradnicovými osami.

$$f: y = \frac{ax + b}{cx + d}$$



Ak zvolíme $a = d = 0$, tak $f: y = \frac{b}{cx} = \frac{k}{x}$. Takúto funkciu nazývame NEPRIAMA ÚMERNOSŤ a hovoríme, že premenné sú NEPRIAMO ÚMERNÉ.

1.1.4 Exponenciálna funkcia

Každá funkcia, ktorá je daná predpisom $f: y = a^x; a \in (0;1) \cup (1;\infty)$, sa nazýva EXPONENCIÁLNA FUNKCIA. Číslo a sa nazýva ZÁKLAD a premenná x EXPONENT.

Definičný obor exponenciálnej funkcie $D(f) = (-\infty; +\infty)$ a obor hodnôt $H(f) = (0; +\infty)$.

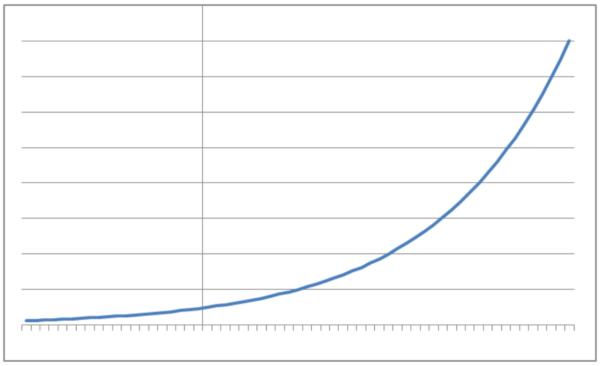
Pre počítanie s exponenciálnymi výrazmi platia nasledujúce pravidlá:

$$a^0 = 1\,; a \neq 0;\ a^{-m} = \frac{1}{a^m}\,; a \neq 0;\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

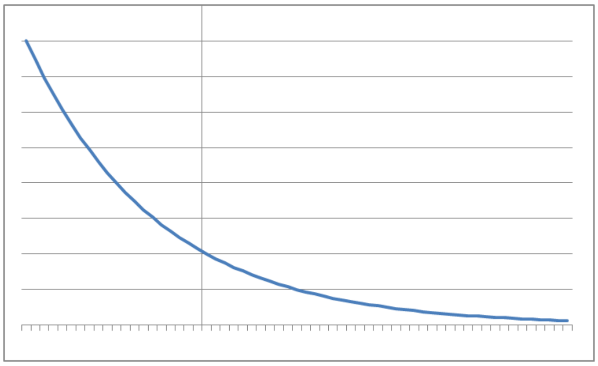
$$a^m . a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\,; a \neq 0$$
$$a^m . b^m = (a.b)^m$$
$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ; b \neq 0 (a^m)^n = a^{m.n}$$

Grafom exponenciálnej funkcie je EXPONENCIÁLA (exponenciálna krivka).

$f: y = a^x; a > 1$



$f: y = a^x; 0 < a < 1$



Špeciálnym prípadom exponenciálnej funkcie je $f: y = e^x$. Kde e je **Eulerova konštanta**, ktorá je definovaná ako $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ a má hodnotu $e = 2{,}718281\ldots$

1.1.5 Logaritmická funkcia

Funkcia inverzná k exponenciálnej funkcii so základom $a \in (0;1) \cup (1;\infty)$ sa nazýva LOGARITMICKÁ FUNKCIA a má predpis $f: y = \log_a x$, pričom platí $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Definičný obor logaritmickej funkcie $D(f) = (0; +\infty)$ a obor hodnôt $H(f) = (-\infty; +\infty)$.

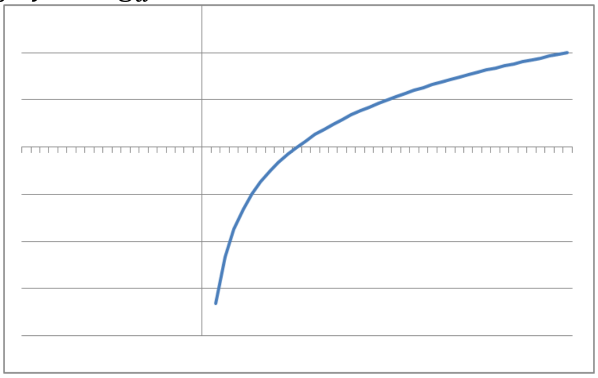
Pre počítanie s logaritmami platia nasledujúce pravidlá:

$$\log_a m + \log_a n = \log_a (m \cdot n)$$
$$\log_a m - \log_a n = \log_a \left(\frac{m}{m}\right) \log_a m^n = n \cdot \log_a m$$

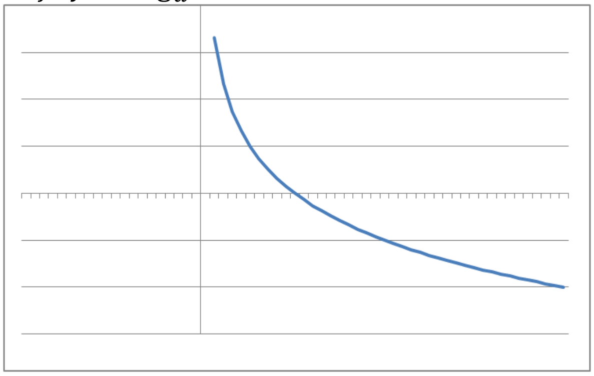
Logaritmus so základom $a = 10$ $(\log_{10} x = \log x)$ nazývame **DEKADICKÝ**. Logaritmus so základom $a = e$ $(\log_e x = \ln x)$ nazývame **PRIRODZENÝ**.

Grafom logaritmickej funkcie je LOGARITMICKÁ KRIVKA.

$f: y = \log_a x \ ; a > 1$



$f: y = \log_a x \ ; 0 < a < 1$



1.2 Postupnosti a nekonečný geometrický rad

Každú funkciu, ktorej definičným oborom je množina prirodzených čísel $D(f) = N$, nazývame POSTUPNOSŤ.

Postupnosť sa nazýva NEKONEČNÁ, ak jej definičným oborom je celá množina N. Postupnosť sa nazýva KONEČNÁ, ak jej definičným oborom je množina prvých n prirodzených čísel.

Postupnosť zapisujme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ alebo $\{a_n\}_{n=1}^{k}$, pričom prvky $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ nazývame ČLENY POSTUPNOSTI.

1.2.1 Aritmetická postupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$sa nazýva ARITMETICKÁ, ak existuje také číslo d, že pre každé prirodzené číslo n platí: $a_{n+1} = a_n + d$. Číslo d nazývame DIFERENCIA aritmetickej postupnosti. Pre $d > 0$ je táto postupnosť rastúca a pre $d < 0$ klesajúca.

Vzťahy jednotlivých členov v aritmetickej postupnosti:

1. pre ľubovoľný n-tý člen aritmetickej postupnosti platí:
   $a_n = a_1 + (n-1).d,$
2. pre každé dva členy a_r, a_s aritmetickej postupnosti platí:
   $a_r = a_s + (r-s).d,$
3. pre každý člen a_r platí, že je aritmetickým priemerom zo susedných členov:
   $a_r = \frac{1}{2}(a_{r-1} + a_{r+1}),$
4. pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti platí:
   $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$
5. pre súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti platí:
   $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}.(2a_1 + (n-1).d).$

1.2.2 Geometrická postupnosť

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$sa nazýva GEOMETRICKÁ, ak existuje také číslo q, že pre každé prirodzené číslo n platí: $a_{n+1} = a_n . q$, $(a \neq 0; q \neq 0)$. Číslo q nazývame KVOCIENT geometrickej postupnosti.

Vzťahy jednotlivých členov v geometrickej postupnosti:

1. pre ľubovoľný n-tý člen geometrickej postupnosti platí:
   $a_n = a_1 . q^{n-1}$,
2. pre každé dva členy a_r, a_s geometrickej postupnosti platí:
   $a_r = a_s . q^{r-s}$,
3. pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti platí:
   $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q}$; ak $q \neq 1$,
4. pre súčet prvých n členov geometrickej postupnosti platí:
   $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = n . a_1$; ak $q = 1$.

1.2.3 Nekonečný geometrický rad

NEKONEČNÝ GEOMETRICKÝ RAD je výraz $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, ktorého jednotlivé členy tvoria geometrickú postupnosť. Nekonečný geometrický rad môžeme zapísať v tvare

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_1 . q + a_1 . q^2 + \cdots + a_1 . q^n + \cdots$$

Nekonečný geometrický rad je:

1. konvergentný práve vtedy, keď $|q| < 1$ a pre jeho súčet platí $s = \frac{a_1}{1-q}$,

2. divergentný práve vtedy, keď $|q| \geq 1$.

Každý člen geometrickej rady je geometrickým priemerom jeho dvoch susedných členov, čo môžeme zapísať ako: $a_k = \sqrt{a_{k-1} . a_{k+1}}$.

1.3 Priemery

Pre n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definovaný priemer ako:

- aritmetický $m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$
- geometrický $m_g = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . \ldots . a_n}$
- harmonický $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$

Nech m_a je aritmetický priemer, m_g je geometrický priemer, m_h je harmonický priemer pre n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, potom platí: $m_h \leq m_g \leq m_a$.

2 ÚROKOVANIE

2.1 Základné pojmy

Peňažnú sumu, ktorú poskytuje veriteľ dlžníkovi za určitý poplatok, nazývame KAPITÁL (istina). Poplatok, ktorý platí dlžník veriteľovi za používanie jeho peňazí, sa nazýva ÚROK.

Veľkosť úroku sa určuje ako percentová časť istiny za úrokové obdobie. Časové obdobie, za ktoré percentová miera určuje úrok ako časť kapitálu, sa nazýva ÚROKOVÁ PERIÓDA.

Percentovú mieru, zodpovedajúcu určitej perióde, nazývame ÚROKOVÁ MIERA. Pri konkrétnych výpočtoch vyjadrujeme úrokovú mieru v tvare desatinného čísla, t.j. úroková miera/100. Takto vyjadrenú úrokovú mieru nazývame ÚROKOVÁ SADZBA.

Úrokové miery môžu byť ročné, polročné, štvrťročné, mesačné a týždenné. Pre úrokové miery sa používa označenie :

- *ročná* - per annum, p.a.
- *polročná* - per semestrem, p.s.
- *štvrťročná* - per quartalem, p.q.
- *mesačná* - per mensem, p.m.

2.2 Typy úrokovania

Podľa spôsobu pripisovania úrokov rozlišujeme:

- *jednoduché úrokovanie* - úrok v každej perióde sa určuje z konštantného začiatočného vkladu, resp. sa počíta za časť úrokovej periódy,
- *zložené úrokovanie* - úrok v každej úrokovej perióde sa počíta z kapitálu zväčšeného o úroky z predchádzajúceho obdobia.

Podľa splatnosti úroku hovoríme o:

- *dekurzívnom (polehotnom) úrokovaní* - úrok je splatný na konci úrokovacej periódy,
- *anticipatívnom (predlehotnom) úrokovaní* - úrok je splatný na začiatku úrokovacej periódy.

2.3 Jednoduché polehotné úrokovanie

Úročí sa iba základný kapitál K. Vyplácané úroky sa k nemu nepričítavajú. Úroky sú vyplatené po uplynutí úrokového obdobia. Úrok sa vypočíta podľa vzorca:

$$u = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360},$$

kde
u – úrok,
K – kapitál, resp. istina (množstvo uložených alebo požičaných peňažných prostriedkov),
p – ročná úroková sadzby v %,
t – doba splatnosti v dňoch (zvyčajne 0 < *n* < 360, viď nižšie).

V prípade, že vyjadríme úrokovú sadzbu ako desatinné číslo i a dobu splatnosti v rokoch, tak vzorec pre výpočet úroku bude:

$$u = K \cdot i \cdot n\,,$$

kde $n = \frac{t}{360}$.

Na vyjadrenie doby splatnosti n delíme dobu splatnosti v dňoch s dĺžkou roka v dňoch. Toto vyjadrenie nie je jednoznačné. Používajú sa rôzne štandardy:

- štandard **ACT/365** (anglická metóda) je založený na skutočnom počte dní úrokového obdobia a dĺžka roka je 365 (resp. 366) dní,
- štandard **ACT/360** (francúzska alebo medzinárodná metóda) je založený na skutočnom počte dní úrokového obdobia, ale dĺžka roka je 360 dní,
- štandard **30E/360** (nemecká alebo obchodná metóda) každý celý mesiac úrokového obdobia sa započíta po 30 dní a dĺžka roka je 360 dní.

Pre jednoduchosť, ak nebude uvedené inak, budeme najčastejšie používať štandard 30E/360.

Príklad 1

Aký bude úrok z vkladu 2000€ uloženého na 7 mesiacov pri úrokovej sadzbe 6% p.a.?

Riešenie:
$K = 2000$
$p = 6$
$t = 7 \cdot 30 = 210$
$i = \frac{6}{100} = 0{,}06$
$n = \frac{210}{360} = \frac{7}{12}$

$$u = \frac{2000 \cdot 6 \cdot 210}{100 \cdot 360} = 70$$

alebo

$$u = 2000 \cdot 0{,}06 \cdot \frac{7}{12} = 70$$

Úrok bude mať hodnotu 70€.

Príklad 2

Vypočítajte veľkosť úrokov pre vklad vo výške 1000€, uložený pri úrokovej sadzbe 5% p.a. na dobu uvedenú v tabuľke podľa štandardov ACT/365, ACT/360, 30E/360.

Vklad v eurách	Dátum vkladu	Dátum výberu
1000	10.2.2011	15.9.2011
1000	15.1.2011	4.3.2011
1000	14.11.2010	2.3.2011

Riešenie:
Riešenie uvedieme pre prehľadnosť v tabuľke

Dátum vkladu	Dátum výberu	Počet dní		Doba uloženia *n*			Úrok podľa štandardov		
		ACT	30E	ACT/360	ACT/365	30E/360	ACT/360	ACT/365	30E/360
10.2.2011	15.9.2011	217	215	0,603	0,595	0,597	30,14	29,73	29,86
15.1.2011	4.3.2011	48	49	0,133	0,132	0,136	6,67	6,58	6,81
14.11.2010	2.3.2011	108	108	0,300	0,296	0,300	15,00	14,79	15,00

Vzťah zúročeného kapitálu a počiatočného kapitálu je vzťahom súčasnej a budúcej hodnoty kapitálu:

$$K_n = K_0 + u = K_0 \cdot (1 + i \cdot n),$$

kde
K_0 – súčasná hodnota kapitálu, počiatočný kapitál,
K_n– budúca hodnota kapitálu, stav kapitálu za dobu n.

Zo základnej rovnice pre jednoduché polehotné úrokovanie môžeme vyjadriť ktorúkoľvek z uvedených veličín.

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i.n} = \frac{u}{i.n}$$

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0.i} = \frac{u}{K_0.i}$$

$$i = \frac{K_n - K_0}{K_0.n} = \frac{u}{K_0.n}$$

Príklad 3

Na akú sumu vzrastie za 5 mesiacov vklad vo výške 12000€ pri úrokovej sadzbe 4% p.a.?

Riešenie:
Dosadíme: $K_0 = 12000;\ i = 0{,}04; n = \frac{5}{12}$

$$K_n = 12000\left(1 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}04\right) = 12200$$

Vklad vzrastie na 12200€.

Príklad 4

Banka poskytuje na vklady úrok 6 % p.a.. Dlžník potrebuje o 9 mesiacov vrátiť dlžobu 5 000€. Koľko musí teraz uložiť do banky, aby mal za 9 mesiacov túto sumu?

Riešenie:
Dosadíme: $K_n = 5000;\ \ i = 0{,}06;\ \ n = \frac{3}{4}$

$$K_0 = \frac{5000}{1 + 0{,}06.\frac{3}{4}} = 4784{,}69$$

Dlžník si musí uložiť 4784,69€.

2.4 Diskont

Výpočet súčasnej hodnoty z hodnoty budúcej sa nazýva *diskontovanie*.

Matematický diskont:

$$D_m = K_n - K_0 = K_n - \frac{K_n}{1+in} = K_n \frac{in}{1+in}.$$

Počíta sa podľa vzorca pre jednoduché úročenie z nominálnej hodnoty.

Ak položíme $K_n = 1$, $n = 1$ dostávame $D_m = \frac{i}{1+i} = i \cdot v$, kde $v = \frac{1}{1+i}$ nazývame *diskontný faktor* alebo *odúročiteľ*.

Princíp diskontu je zhodný s platením úroku na začiatku obdobia = *predlehotné úročenie*. *Obchodný (bankový) diskont* – odmena odo dňa výplaty do dňa splatnosti (pohľadávky). *Obchodný diskont*:

$$D_{ob} = K_n \cdot d \cdot n$$

kde
K_n – nominálna hodnota pohľadávky, ktorá je splatná za dobu n,
d – diskontná sadzba

Súčasná hodnota je:

$$K_{ob} = K_n \cdot (1 - d \cdot n)$$

O obchodnom (bankovom) diskonte hovoríme v súvislosti s eskontom zmenky. Ak prevezme banka nejakú pohľadávku pred dobou splatnosti tejto pohľadávky, nevyplatí celú výšku pohľadávky, ale istú časť si ponechá.

Ďalšími diskontovanými cennými papiermi sú pokladničné poukážky. Sú to krátkodobé dlhové cenné papiere, ich doba splatnosti je maximálne 12 mesiacov a sú emitované väčšinou štátom. Sú vydávané obvykle v zaknihovanej podobe a znejú na doručiteľa.

Príklad 5

Koľko dostane vyplatené klient, ktorému banka eskontuje zmenku s nominálnou hodnotou 100 000€ dva mesiace pred dobou splatnosti pri diskontnej sadzbe 6% p.a.?

Riešenie:
Dosadíme $K_n = 100000; n = \frac{2}{12}; d = 0{,}06$

$$K_{ob} = 100000\left(1 - \frac{2}{12}0{,}06\right) = 99000$$

Klient dostane vyplatené 99 000€.

2.5 Zložené úrokovanie

O zloženom úrokovaní má význam uvažovať vtedy, keď doba vkladu je dlhšia ako jedno úrokovacie obdobie. Pri zloženom úrokovaní sa vyplatené úroky pripočítavajú k pôvodnému kapitálu a v nasledujúcom úrokovom období sa ako základ pre výpočet úroku berie hodnota kapitálu zvýšená o úrok. Úročí sa teda už zúročený kapitál.

Po prvom úrokovacom období je hodnota kapitálu

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + i),$$

po druhom úrokovacom období je hodnota kapitálu

$$K_2 = K_1 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + i)^2, \vdots$$

teda pre výpočet budúcej hodnoty platí po n úrokovacích obdobiach platí:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n,$$

kde
K_0 – súčasná hodnota kapitálu,
K_n – budúca hodnota kapitálu (zúročený kapitál),
i – ročná úroková sadzba,
n – doba splatnosti (v rokoch).

Príklad 6

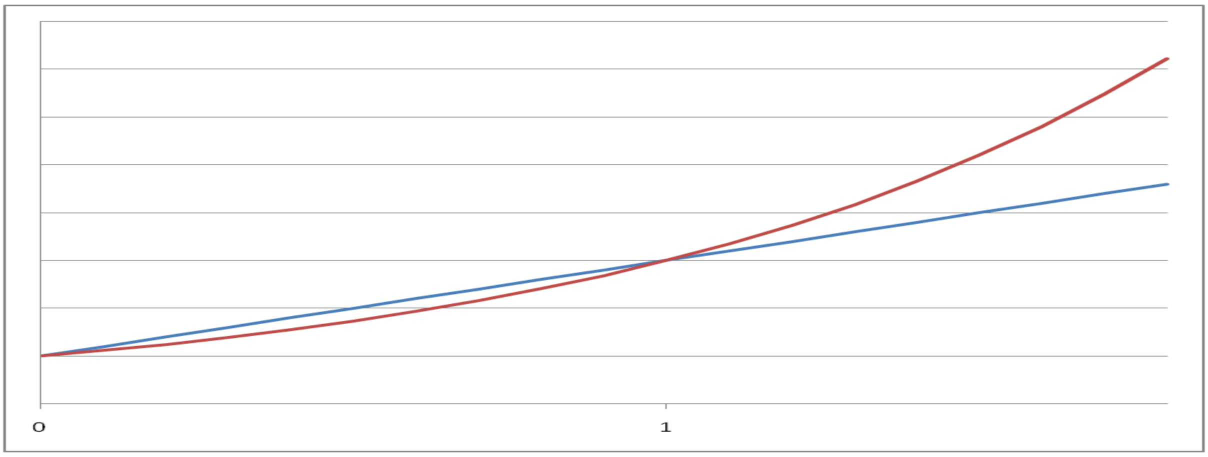
Vypočítajte budúcu hodnotu kapitálu 10 000€ po desiatich rokoch pri ročnej 8 % úrokovej sadzbe.

Riešenie:
Dosadíme $K_0 = 10000; i = 0{,}08; n = 10$

$$K_n = 10000 \cdot (1 + 0{,}08)^{10} = 21589{,}25$$

Kapitál bude mať hodnotu 21 589,25€.

Je zrejmé, že pri úrokovacom období kratšom ako úroková perióda je pri rovnakej úrokovej sadzbe pre majiteľa vkladu výhodnejšie jednoduché úrokovanie. Pri úrokovacom období dlhšom ako úroková perióda je to naopak.



Zo vzorca pre výpočet budúcej hodnoty môžeme vyjadriť ľubovoľnú z veličín K_0, i, n v závislosti zvyšných troch. Dostaneme nasledujúce vzorce:

pre výpočet súčasnej hodnoty

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n},$$

pre výpočet úrokovej sadzby

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1,$$

pre výpočet počtu úrokovacích období

$$n = \frac{lnK_n - lnK_0}{ln(1+i)}.$$

Príklad 7

Aký kapitál vzrastie za 10 rokov pri úrokovej sadzbe 8 % p.a. na 100 000€?

Riešenie:

Dosadíme $K_n = 100000; i = 0{,}08; n = 10$

$$K_0 = \frac{100000}{(1 + 0{,}08)^{10}} = 46319{,}35$$

Kapitál musí mať súčasnú hodnotu 46 319,35€.

Príklad 8

Pri akej ročnej úrokovej sadzbe vzrastie za 6 rokov vklad 8000€ na 10 000€?

Riešenie:
Dosadíme $K_n = 10000;\ K_0 = 8000; n = 6$

$$i = \sqrt[6]{\frac{10000}{8000}} - 1 = 0{,}0379$$

Úroková sadzba má hodnotu 3,79%.

V reálnej praxi sa často stretávame s prípadmi, že úrokovacie obdobie je kratšie ako jeden rok (tzn. úroky pripisujeme viackrát do roka). Na základe predchádzajúceho vzorca môžeme zovšeobecniť výpočet budúcej hodnoty pre iné ako ročné úrokovacie obdobie. Budeme predpokladať, že úroky sa pripisujú m – krát do roka. Potom budúcu hodnotu môžeme vypočítať zo vzorca

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n},$$

kde
m – počet úrokovacích období za jeden rok,
$\frac{i}{m}$ - úroková sadzba za m-tinu roka.

Príklad 9

Akú hodnotu bude mať o tri roky vklad 8 000€ pri úrokovej sadzbe 8%p.a., ak sa úroky pripisujú štvrťročne?

Riešenie:
Dosadíme $K_0 = 8000; n = 3; m = 4; i = 0{,}08$

$$K_n = 8000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 10145{,}93$$

Vklad bude mať hodnotu 10 145,93€.

2.6 Zmiešané úrokovanie

Kombináciou jednoduchého a zloženého úrokovania vzniká zmiešané úrokovanie.

Nech úrokové obdobie n je desatinné číslo väčšie ako úroková perióda, potom n je možné zapísať ako $n = n_0 + l$, kde n_0 je prirodzené číslo označujúce počet ukončených úrokových období, počas ktoré je kapitál uložený, l je číslo menšie ako 1 a udáva necelú časť úrokového obdobia.

Potom budúcu hodnotu môžeme vypočítať:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^{n_0} \cdot (1 + l \cdot i)$$

Príklad 10

Akú hodnotu bude mať o tri roky a 5 mesiacov vklad 8 000€ pri úrokovej sadzbe 8%p.a., ak sa úroky pripisujú polročne?

Riešenie:

Dosadíme $K_0 = 8000; n_0 = 6; m = 5; i = \frac{0,08}{2} = 0,04; l = \frac{5}{6}$

$$K_n = 8000 \cdot (1 + 0,04)^6 \cdot \left(1 + \frac{5}{6} \cdot 0,04\right) = 10459,97$$

Vklad bude mať hodnotu 10 459,97€.

2.7 Nominálna a efektívna úroková sadzba

V bežných bankových operáciách sa úroky počítajú niekoľkokrát do roka. Ročná úroková sadzba i, z ktorej je po každej m-tine roka splatná suma $\frac{i}{m}$, sa nazýva *nominálna úroková sadzba*.

Jedna peňažná jednotka vzrastie na konci prvého roka na hodnotu $\left(1 + \frac{i}{m}\right)^m$. Ak by sme ju chceli zaplatiť jednou splátkou, tak by sme platili 1+i_e, a preto platí:

$$1 + i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m,$$

kde i_e sa nazýva *efektívna úroková sadzba*. Je to ročná úroková miera, ktorá dáva za jeden rok rovnakú akumulovanú sumu ako zodpovedajúca nominálna úroková sadzba.

Efektívna úroková sadzba umožňuje porovnávať rôzne nominálne úrokové sadzby za rovnaké časové obdobie, avšak s rôznou frekvenciou pripisovania úrokov. Platí $i_e > i$.

2.8 Spojité úrokovanie

Predstavme si, že zmenšujeme časové úseky, v ktorých sa pripisujú úroky tak, že $m \to +\infty$, potom hovoríme o *spojitom úrokovaní*. Efektívna úroková miera odpovedajúca tomuto prípadu sa nazýva *úroková intenzita*:

$$1 + i_e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = e^i,$$

$$i_e = e^i - 1,$$

kde e je *Eulerova konštanta* a má hodnotu $e \doteq 2,718$.

Budúcu hodnotu pri spojitom úrokovaní potom vypočítame:

$$K_n = K_0 \cdot e^{in} \;.$$

3 SPORENIE

V ekonomickej praxi, vo finančníctve a v poistení sa veľmi často stretávame so systémom pravidelne sa opakujúcich platieb. Jednotlivé platby nazývame **anuity** alebo **splátky.** Typickým príkladom je sporenie.

Podľa dĺžky môžeme sporenie rozdeliť na:

- *krátkodobé* – to je sporenie, ktorého doba nepresiahne jedno úrokovacie obdobie, úroky sa pripisujú na konci doby sporenia a jednotlivé platby sa úročia na základe jednoduchého úrokovania,
- *dlhodobé* – je sporenie, ktorého doba sporenia je dlhšia ako jedno úrokovacie obdobie. V tomto prípade sa úroky pripíšu k nasporenej čiastke vždy na konci úrokovacieho obdobia a potom sa úročia spolu s touto čiastkou.

Podľa termínu platieb sporenie delíme na:

- *predlehotné* – platba sa uskutočňuje na začiatku *m*-tiny úrokovacieho obdobia,
- *polehotné* – platba sa uskutočňuje na konci *m*-tiny úrokovacieho obdobia.

Podľa veľkosti jednotlivých splátok:

- *konštantné* – jednotlivé platby sa nemenia,
- *premenlivé* – môže sa meniť veľkosť platieb.

Súčet všetkých platieb za dané obdobie budeme označovať ako ULOŽENÚ ČIASTKU. Ak k uloženej čiastke pripočítame úroky, budeme hovoriť o NASPORENEJ ČIASTKE.

Ďalej sa budeme zaoberať len sporením s konštantnými platbami.

3.1 Krátkodobé sporenie

Predpokladajme, že úrokovacie obdobie je jeden rok (t.j. úroky sa pripisujú na konci roka) a pravidelné platby sa ukladajú m-krát do roka. Podľa toho, či sa budú ukladať na začiatku alebo konci každej m-tiny roku, rozlišuje *krátkodobé sporenie predlehotné* a *krátkodobé sporenie polehotné*.

3.1.1 Krátkodobé sporenie predlehotné

Budeme predpokladať, že ukladáme na začiatku každej m-tiny roku m-tinu z celkovej uloženej čiastky. Chceme zistiť, aká bude nasporená čiastka na konci roku pri ročnej úrokovej sadzbe *i*.

Pre zjednodušenie budeme uvažovať, že uložená čiastka bude 1, teda hodnota platby bude $\frac{1}{m}$.

poradie platby	úrokovacia doba	úrok
1	$\frac{m}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot\frac{m}{m}\cdot i$
2	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot i$
3	$\frac{m-2}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\cdot i$
⋮	⋮	⋮
m	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot i$

Úrok je počítaný na základe vzorca pre **jednoduché úrokovanie**. Celkový úrok vypočítame ako súčet úrokov jednotlivých platieb, ktoré tvoria **aritmetickú postupnosť**. Celkový úrok dostaneme zo vzorca pre súčet členov aritmetickej postupnosti:

$$u = \frac{1}{m}\cdot\frac{m}{m}\cdot i + \frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot i + \frac{1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\cdot + \cdots + \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot i$$
$$= \frac{i}{m^2}[m + (m-1) + (m-2) + \cdots + 1] = \frac{i}{m^2}\cdot\frac{m\cdot(m+1)}{2},$$

teda

$$u = \frac{m+1}{2m}i,$$

kde
u – je úrok za jedno úrokovacie obdobie,
m – je počet vkladov v rámci jedného úrokovacieho obdobia,
i – je ročná úroková sadzba.

Celková nasporená čiastka má hodnotu:

$$S`_1 = 1 + \frac{m+1}{2m}i.$$

Ak budeme každú m-tinu úrokovacieho obdobia ukladať čiastku x, tak za celé úrokovacie obdobie uložíme čiastku $m\cdot x$. Potom celková nasporené čiastka bude:

$$S`_x = m\cdot x\cdot\left(1 + \frac{m+1}{2m}i\right).$$

3.1.2 Krátkodobé sporenie polehotné

O polehotnom sporení uvažujeme vtedy, keď ukladáme na konci každej m-tiny roku m-tinu z celkovej uloženej čiastky. Chceme zistiť aká bude nasporená čiastka na konci roku pri ročnej úrokovej sadzbe i. Pre zjednodušenie budeme uvažovať, že uložená čiastka bude 1, teda hodnota platby bude $\frac{1}{m}$.

poradie platby	úrokovacia doba	úrok
1	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot i$
2	$\frac{m-2}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\cdot i$
⋮	⋮	⋮
m-1	$\frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot i$
m	$\frac{0}{m}$	$\frac{1}{m}\cdot\frac{0}{m}\cdot i$

Celkový úrok vypočítame podobne ako pri krátkodobom sporení predlehotnom, ako súčet úrokov jednotlivých platieb, ktoré tvoria **aritmetickú postupnosť**. Celkový úrok dostaneme zo vzorca pre súčet členov aritmetickej postupnosti:

$$u=\frac{1}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot i+\frac{1}{m}\cdot\frac{m-2}{m}\cdot+\cdots+\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}\cdot i+\frac{1}{m}\cdot\frac{0}{m}\cdot i$$
$$=\frac{i}{m^2}[(m-1)+(m-2)+\cdots+1+0]=\frac{i}{m^2}\cdot\frac{m\cdot(m-1)}{2},$$

teda

$$u=\frac{m-1}{2m}i,$$

kde po rovnakej úvahe ako v predchádzajúcej kapitole dostaneme celkovú nasporenú čiastku:

$$S_x=m\cdot x\cdot\left(1+\frac{m-1}{2m}\cdot i\right).$$

Rozdiel medzi nasporenými čiastkami pri krátkodobom predlehotnom a polehotnom sporení je v ročnom úroku z jednej platby.

Z rovnice pre výpočet celkovej nasporenej čiastky môžeme vyjadriť:

- x – výšku platby

$$x=\frac{S_x}{m\cdot\left(1+\frac{m-1}{2m}\cdot i\right)},$$

- i – úrokovú sadzbu

$$i=\frac{S_x-m\cdot x}{\frac{m\cdot x\cdot(m-1)}{2m}}.$$

Ak bude úrokovacie obdobie kratšie ako rok, prispôsobíme úrokovú sadzbu aj počet platieb dĺžke úrokovacieho obdobia.

3.2 Dlhodobé sporenie

O dlhodobom sporení uvažujeme, ak je doba sporenia viac úrokových období. Pri odvedení rovníc pre celkovú nasporenú čiastku za n období budeme predpokladať, že v rámci jedného úrokovacieho obdobia uložíme len jednu platbu a úrokovacie obdobie je jeden rok. Podľa toho či platbu ukladáme na začiatku alebo na konci úrokovacieho obdobia, budeme rozlišovať *dlhodobé sporenie predlehotné* a *dlhodobé sporenie polehotné*.

3.2.1 Dlhodobé sporenie predlehotné

Na začiatku každého úrokovacieho obdobia ukladáme platbu a (*anuita*). Chceme zistiť, aká bude celková nasporená čiastka na konci n-tého úrokovacieho obdobia pri úrokovej sadzbe i. Budeme predpokladať, že úrokovacie obdobie je ročné a úroky sa pripisujú na konci roka a ďalej sa úročia s anuitou.

poradie platby	počet období úrokovania	celková hodnota konci ***n***-tého obdobia
1	n	$a \cdot (1+i)^n$
2	$n-1$	$a \cdot (1+i)^{n-1}$
3	$n-2$	$a \cdot (1+i)^{n-2}$
⋮	⋮	⋮
n	1	$a \cdot (1+i)$

Pre výpočet celkovej hodnoty jednotlivých splátok na konci n-tého úrokovacieho obdobia sme použili rovnice pre budúcu hodnotu pri **zloženom úrokovaní**. Celkovú nasporenú hodnotu dostaneme ako súčet jednotlivých budúcich hodnôt, ktoré tvoria **geometrickú postupnosť**. Celkovú nasporenú hodnotu dostaneme zo vzorca pre súčet členov geometrickej postupnosti:

$$S` = a \cdot (1+i)^n + a \cdot (1+i)^{n-1} + a \cdot (1+i)^{n-2} + \cdots + a \cdot (1+i)$$
$$= a \cdot (1+i) \cdot [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1] = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1}$$

prvý člen geometrickej postupnosti má hodnotu $a \cdot (1+i)$ a kvocient $(1+i)$, teda

$$S` = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \ ,$$

kde

$S`$ – je celková nasporená čiastka, budúca hodnota anuity,
a – výška platby, ktorá je ukladaná na začiatku úrokovacieho obdobia, *anuita,*
n – je počet úrokovacích období,
i – je ročná úroková sadzba.

Výraz

$$s_n` = (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

nazývame **predlehotný sporiteľ**, ktorý udáva celkovú nasporenú hodnotu pre $a = 1$. Potom vzťah pre výpočet celkovej nasporenej hodnoty môžeme napísať:

$$S` = a \cdot s_n` \ .$$

3.2.2 Dlhodobé sporenie polehotné

Na konci každého úrokovacieho obdobia ukladáme platbu a. Chceme zistiť, aká bude celková nasporená čiastka na konci n-tého úrokovacieho obdobia pri úrokovej sadzbe i. Budeme predpokladať, že úrokovacie obdobie je ročné a úroky sa pripisujú na konci roka a ďalej sa úročia s anuitou.

poradie platby	počet období úrokovania	celková hodnota konci *n*-tého obdobia
1	$n-1$	$a \cdot (1+i)^{n-1}$
2	$n-2$	$a \cdot (1+i)^{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
***n* – 1**	1	$a \cdot (1+i)$
n	0	a

Podobne ako pri dlhodobom sporení predlehotnom celkovú nasporenú hodnotu dostaneme ako súčet členov **geometrickej postupnosti**:

$$S = a \cdot (1+i)^{n-1} + \ a \cdot (1+i)^{n-2} + \cdots + \ a \cdot (1+i) \quad + a$$
$$= a \cdot [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1] = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \ ,$$

teda

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \, .$$

Výraz

$$s_n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

nazývame **polehotný sporiteľ**, ktorý udáva celkovú nasporenú hodnotu pre $a = 1$. Potom vzťah pre výpočet celkovej nasporenej hodnoty môžeme napísať

$$S = a \cdot s_n \ .$$

Z uvedeného vyplýva, že

$$s_n` = (1+i) \cdot s_n \ .$$

Z rovnice pre výpočet celkovej nasporenej čiastky môžeme vyjadriť:

- a – výšku platby, *anuitu*

$$a = \frac{S}{s_n} = \frac{S \cdot i}{(1+i)^n - 1} \ ,$$

- n – dobu sporenia

$$n = \frac{ln\left(1 + S \cdot \frac{i}{a}\right)}{ln(1+i)} \ .$$

3.3 Kombinácia krátkodobého a dlhodobého sporenia

V reálnej praxi sa často stretávame so sporením, keď si ukladáme platby viackrát v rámci jedného úrokovacieho obdobia a sporíme viac ako jedno úrokovacie obdobie. V tejto kapitole budeme hľadať celkovú nasporenú čiastku na konci n-tého obdobia, ak budeme ukladať platby m-krát v rámci jedného úrokovacieho obdobia.

Rozdelíme problém na dve časti podľa toho, či ukladáme peniaze na začiatku, alebo na konci m-tiny roka.

3.3.1 Kombinácia dlhodobého a krátkodobého predlehotného sporenia

V tejto časti hľadáme nasporenú čiastku pre prípad, keď ukladáme platbu x na začiatku m-tiny úrokovacieho obdobia, počas n úrokovacích období.

Najskôr zistíme akú čiastku nasporíme za jedno úrokovacie obdobie, podľa rovnice pre **krátkodobé predlehotné sporenie**:

$$S`_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} i\right) \ .$$

Táto čiastka je rovnaká ako čiastka, ktorú by sme pri dlhodobom polehotnom sporení uložili na konci úrokovacieho obdobia, teda $S`_x = a$. Podľa rovnice pre **dlhodobé polehotné sporenie** dostaneme vzťah pre **KOMBINÁCIU DLHODOBÉHO A KRÁTKODOBÉHO PREDLEHOTNÉHO SPORENIA**:

$$S` = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \ ,$$

kde

$S`$ – je celková nasporená čiastka, budúca hodnota anuity,
x – je výška platby, ktorá je ukladaná na začiatku m-tiny úrokovacieho obdobia,
m – je počet vkladov v rámci jedného úrokovacieho obdobia,
n – je počet úrokovacích období,
i – je úroková sadzba za jedno úrokovacie obdobie.

3.3.2 Kombinácia dlhodobého a krátkodobého polehotného sporenia

Podobne ako v predchádzajúcej časti hľadáme nasporenú čiastku na konci n-tého úrokovacieho obdobia pre prípad, keď ukladáme platbu x na konci m-tiny úrokovacieho obdobia.

Najskôr zistíme akú čiastku nasporíme za jedno úrokovacie obdobie, podľa rovnice pre **krátkodobé polehotné sporenie**:

$$S_x = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right) .$$

Táto čiastka je rovnaká ako čiastka, ktorú by sme pri dlhodobom polehotnom sporení uložili na konci úrokovacieho obdobia, teda $S`_x = a$. Podľa rovnice pre **dlhodobé polehotné sporenie** dostaneme vzťah pre **KOMBINÁCIU DLHODOBÉHO A KRÁTKODOBÉHO POLEHOTNÉHO SPORENIA**:

$$S = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} .$$

Z rovnice pre výpočet celkovej nasporenej čiastky môžeme vyjadriť:

- x – výšku platby

$$x = \frac{S \cdot i}{m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right) \cdot [(1+i)^n - 1]} ,$$

- n – dobu sporenia (počet úrokovacích období)

$$n = \frac{ln\left(\frac{S \cdot i}{x \cdot m \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right)} + 1\right)}{ln(1+i)} ,$$

kde
S – je celková nasporená čiastka, budúca hodnota anuity,
x – je výška platby, ktorá je ukladaná na začiatku m-tiny úrokovacieho obdobia,
m – je počet vkladov v rámci jedného úrokovacieho obdobia,
n – je počet úrokovacích období,
i – je úroková sadzba za jedno úrokovacie obdobie.

4 DÔCHODKY

Dôchodok je postupnosť platieb, ktoré sa uskutočňujú v pravidelných intervaloch v rovnakej výške (ktorú nazývame *anuita*) a označujeme a v priebehu určitého obdobia. V nasledujúcej kapitole budeme anuitou označovať vyplatenú sumu (opačne ako pri sporení) dôchodku.

Dôchodky môžeme rozdeliť podľa:

1. podmienok vyplácania dôchodku na:
   - *nepodmienený* – nie je viazaný na žiadnu podmienku,
   - *podmienený* – vyplácanie je podmienené (napr. starobný dôchodok, podmienka je vek).
2. veľkosti jednotlivých splátok na dôchodok s:
   - *konštantnými platbami,*
   - *premenlivými platbami.*
3. momentu vyplácania anuity na:
   - *polehotný* – dôchodky sú vyplácané na začiatku časového obdobia,
   - *predlehotný* – dôchodky sú realizované na konci časového obdobia.
4. dĺžky vyplácania na:
   - *dočasný* – dôchodok je vyplácaný určitú, pevne určenú dobu,
   - *trvalý* – dôchodok je vyplácaný bez časového obmedzenia.
5. začiatku vyplácania na:
   - *bezprostredný* – s vyplácaním sa začne ihneď (prvá splátka realizuje na začiatku alebo na konci prvej periódy),
   - *odložený* – s vyplácaním sa začne až po určitom období.

Keďže sa na každý dôchodok môžeme pozerať ako na systém peňažných tokov, môžeme počítať jeho súčasnú hodnotu a jeho budúcu hodnotu.

SÚČASNÁ HODNOTA D je súčet všetkých súčasných hodnôt v budúcnosti realizovaných platieb, ktorá udáva, koľko si musíme uložiť, aby nám pri danej úrokovej sadzbe boli v budúcnosti vyplácané príslušná anuita po danú dobu.

BUDÚCA HODNOTA S je súčet všetkých vyplatených anuít, prepočítaných ku dňu splatnosti dôchodku sa udáva hodnota, ktorú by sme získali, keby sme všetky vyplatené anuity okamžite po vyplatení uložili (je to vlastne sporenie).

Medzi súčasnou a budúcou hodnotou dôchodku platí vzťah:

$$S = D \cdot (1 + i)^n \ ,$$

kde
S – je budúca hodnota dôchodku,

D – je súčasná hodnota dôchodku,
i – je úroková sadzba,
n – je počet úrokovacích období počas, ktorých je dôchodok vyplácaný.

4.1 Bezprostredný dôchodok

Pri bezprostrednom dôchodku sa začínajú anuity vyplácať okamžite v danom období. Podľa toho, či budú anuity vyplácané na konci, alebo na začiatku obdobia, rozdelíme dôchodok na **bezprostredný polehotný** a **bezprostredný predlehotný**.

4.1.1 Bezprostredný polehotný dôchodok

V nasledujúcej kapitole budú anuity vyplácané na konci daného obdobia a s vyplácaním sa začne okamžite. Súčasnú hodnotu D nájdeme ako súčet všetkých súčasných hodnôt vyplatených anuít a.

Súčasnú hodnotu každej anuity vypočítame tak, že danú hodnotu diskontujeme. Pre zjednodušenie môžeme zaviesť v *DISKONTNÝ FAKTOR* (*odúročiteľ*) ako:

$$v = \frac{1}{1+i} \quad .$$

poradie výplaty	súčasná hodnota
1	$\frac{a}{1+i} = a \cdot v$
2	$\frac{a}{(1+i)^2} = a \cdot v^2$
3	$\frac{a}{(1+i)^3} = a \cdot v^3$
⋮	⋮
n	$\frac{a}{(1+i)^n} = a \cdot v^n$

Súčet všetkých súčasných hodnôt je súčtom geometrickej postupnosti, ktorej prvý člen má hodnotu $\frac{a}{1+i}$ a kvocient $\frac{1}{1+i}$, teda:

$$D = \frac{a}{1+i} + \frac{a}{(1+i)^2} + \frac{a}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{a}{(1+i)^n} =$$

$$= \frac{a}{1+i} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right) = \frac{a}{1+i} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{(1+i)} - 1} =$$

$$= \frac{a}{1+i} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1-1-i}{(1+i)}} = a \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{-i}$$

$$D = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \ ,$$

kde
D – je súčasná hodnota dôchodku,
a – je pravidelná platba (anuita),
i – je ročná úroková sadzba,
n – je počet úrokovacích období,
v - je diskontný faktor.

Podobne ako pri sporení je možné vyplácať anuity častejšie ako jedenkrát v úrokovacom období. Budeme predpokladať, že na konci každej m-tiny úrokovacieho obdobia sú vyplácané splátky vo výške x. Podľa vzorca pre *krátkodobé polehotné sporenie* najskôr zistíme, aká bude celková hodnota výplat ku koncu úrokovacieho obdobia, potom touto čiastkou nahradíme v predchádzajúcom vzťahu a.

Súčasnú hodnotu potom vypočítame:

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \ .$$

V prípade, že sú splátky vyplácané na začiatku každej m-tiny úrokovacieho obdobia, anuitu a nahradíme hodnotou zo vzťahu pre *krátkodobé predlehotné sporenie*.

Súčasnú hodnotu potom vypočítame:

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \ ,$$

kde
x – je výška platby, ktorá je vyplatená na začiatku(resp. na konci) m-tiny úrokovacieho obdobia,
m – je počet výplat v rámci jedného úrokovacieho obdobia.

4.1.2 Bezprostredný predlehotný dôchodok

Ak sú anuity vyplácane na začiatku daného úrokovacieho obdobia a s vyplácaním sa začne okamžite budeme hovoriť o bezprostrednom predlehotnom dôchodku. Súčasnú hodnotu D` nájdeme ako súčet všetkých súčasných hodnôt vyplatených anuít a.

Postup je podobný ako v predchádzajúcej kapitole. Súčet všetkých súčasných hodnôt je súčtom geometrickej postupnosti, z čoho dostaneme vzťah:

$$D = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i \cdot v} \ .$$

4.2 Odložený dôchodok

Odloženie dôchodku znamená, že sa s jeho vyplácaním nezačne okamžite, ale až po uplynutí daného počtu úrokovacích období. Budeme uvažovať, že dôchodok bude odložený k úrokovacích období počas, ktorých sa budú pripisovať k uloženej sume úroky.

Opäť rozdelíme úvahy podľa toho, či sú anuity vyplácané na začiatku, alebo na konci časového obdobia, na dôchodok **odložený polehotný** a **odložený predlehotný**.

4.2.1 Odložený polehotný dôchodok

Polehotný odložený dôchodok je vyplácaný vždy na konci určitého časového obdobia a jeho vyplácanie je odložené o k úrokových období.

Budeme vychádzať zo vzťahu pre *bezprostredný polehotný dôchodok*, kde súčasnú hodnotu bezprostredného polehotného dôchodku D diskontujeme o k úrokovacích období.

Súčasnú hodnotu odloženého polehotného dôchodku potom vypočítame ako:

$$K = v^k \cdot a \cdot \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1}{(1+i)^k} \cdot a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \ ,$$

kde
a – je pravidelná platba (anuita),
i – je ročná úroková sadzba,
k – je úrokovacích období, v ktorých nie sú vyplácané anuity,
n – je počet úrokovacích období, v ktorých sú vyplácané anuity,
v - je diskontný faktor.

Ak dochádza k vyplácaniu dôchodku na konci každej m-tiny roku, tak vzorec pre výpočet odloženého polehotného dôchodku upravíme rovnakým spôsobom ako v prípade bezprostredného polehotného dôchodku. Využijeme vzťah pre krátkodobé polehotné sporenie, teda nahradíme a budúcou hodnotou na konci úrokovacieho obdobia. Potom dostaneme vzťah:

$$K = v^k \cdot m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i} \ .$$

4.2.2 Odložený predlehotný dôchodok

V tomto prípade sú anuity vyplácané na začiatku úrokovacieho obdobia počas n úrokovacích období a k úrokovacích období je dôchodok odložený.

Využitím rovnakých úvah ako v predchádzajúcej časti dostaneme rovnicu:

$$K` = v^{k-1} \cdot a \cdot \frac{1 - v^n}{i} = \frac{1}{(1+i)^{k-1}} \cdot a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \ .$$

4.3 Večný dôchodok

Pri večnom dôchodku nie je doba vyplácania anuít obmedzená, teda je anuity sú vyplácané nám, našim potomkom, ich potomkom, a tak ďalej ..., to znamená $n = \infty$.

Rovnako ako pri dočasnom dôchodku, večný dôchodok podľa toho, kedy sa začne s vyplácaním na **bezprostredný** a **odložený**. A podľa toho, kedy sú jednotlivé anuity vyplácané, na **predlehotný** a **polehotný**.

V nasledujúcich kapitolách budeme hľadať súčasnú hodnotu D.

4.3.1 Večný polehotný dôchodok

Ak budú anuity vyplácané na konci úrokovacieho obdobia, s výplatou sa začne okamžite a doba vyplácania nie je obmedzená, súčasnú hodnotu nájdeme ako limitu $(n \to \infty)$ **bezprostredného polehotného dôchodku**:

$$D = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{a}{i}.$$

Ak bude večný dôchodok odložený o k úrokovacích období, musíme predchádzajúci vzťah vynásobiť diskontným faktorom, umocneným na k-tu. Teda

$$K = v^k \cdot \frac{a}{i}.$$

V prípade, že je dôchodok vyplácaný m-krát za úrokovacie obdobie, nahradíme anuitu a pomocou vzťahu pre **krátkodobé sporenie** (predlehotné alebo polehotné). Počiatočnú hodnotu vypočítame z rovnice:

$$D = \frac{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m \pm 1}{2m} \cdot i\right)}{i}\ .$$

4.3.2 Večný predlehotný dôchodok

Počiatočnú hodnotu večného predlehotného dôchodku dostaneme ako limitu súčasnej hodnoty **bezprostredného predlehotného dôchodku**.

$$D` = \lim_{n\to\infty} a \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = a + \frac{a}{i}\ .$$

Ostatné vzťahy odvodíme rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcej časti. Je zrejmé, že sa počiatočná hodnota večného predlehotného dôchodku odlišuje od večného polehotného dôchodku len o prvú platbu a.

5 ÚVERY

ÚVEROM budeme rozumieť poskytnutie peňažnej sumy na určitú dobu za dohodnutý úrok.

UMOROVANÍM nazývame proces vyskytujúci sa pri splácaní úrokovanej pôžičky, teda takej pôžičky, pri ktorej sa predpokladá, že dlžník vráti veriteľovi podľa dohodnutých podmienok okrem požičanej sumy aj úroky z tejto sumy.

Umorovanie (splácanie) úveru z hľadiska veriteľa môžeme považovať za príjem dôchodku (renty). Každá splátka úveru sa skladá z úmoru a z úroku. Umorovacia zložka splátky úveru postupne znižuje dlžnú sumu (zostatok dlhu). Úroková zložka splátky úveru spláca úrok zo zostatku dlhu. Postupným znižovaním zostatku dlhu klesá aj veľkosť úrokovej zložky splátok.

Úvery môžeme rozdeliť podľa:

1. doby splatnosti na:
    - *krátkodobé* – doba splatnosti nepresahuje 1 rok,
    - *strednodobé* – doba splatnosti je od 1 do 4 rokov,
    - *dlhodobé* – doba splatnosti je dlhšia ako 4 roky.
2. spôsobu umorovania na:
    - *úver splatný jednorázovo* vrátane úrokov po uplynutí doby splatnosti. V tomto prípade ide o problém výpočtu budúcej hodnoty z poskytnutej sumy na základe dohodnutej doby splatnosti a úrokovej sadzby.
    - *úver bez záväzného splácania*, kedy dlžník spláca v určených termínoch iba dohodnuté úroky, má však právo kedykoľvek vykúpiť pôžičku. Takúto pôžičku považujeme za večnú rentu, v ktorej jedna splátka reprezentuje dohodnuté úroky z pôžičky.
    - *úver splácaný pravidelnými platbami* od začiatku. Podľa charakteru týchto platieb rozlišujeme 2 možnosti:
        - *platby s konštantnou anuitou* – platby sú stále v rovnakej výške (časť platby ide na úmor úveru a časť na zaplatenie úrokov),
        - *platby s konštantným úmorom* – platby nie sú v rovnakej výške, ale rovnaká je čiastka, ktorá znižuje úver, t.j. *úmor.*

Pravidelnými platbami sa splácajú strednodobé a dlhodobé úvery.

Prehľad výšky splátok úveru vrátane úrokov z hľadiska ich časového rozloženia zostavujú banky pre svojich klientov do tzv. *umorovacieho plánu* alebo *splátkového kalendára*.

5.1 Splácanie úveru rovnakými splátkami (konštantná anuita)

Budeme uvažovať o úver veľkosti D, ktorý má byť splatený aj s úrokmi n rovnakými anuitami a, splatnými vždy koncom úrokovacieho obdobia pri nemennej ročnej úrokovej sadzbe i. Predpokladajme, že úrokovacie obdobie je ročné. Tento spôsob splácania úveru sa dá previesť na úlohy o dôchodku. Počiatočnú hodnotu úveru možno považovať za súčasnú hodnotu dôchodku a jednotlivé splátky možno považovať za výplaty dôchodku (renty).

Súčasná hodnota dôchodku je:

$$D = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \ ,$$

z čoho vyjadríme výšku anuity (splátky):

$$a = \frac{D \cdot i}{1 - \frac{1}{(1+i)^n}} = \frac{D \cdot i}{1 - v^n} \ ,$$

kde
D – je súčasná hodnota dôchodku,
a – je splátka (anuita),
i – je ročná úroková sadzba,
n – doba splatnosti v rokoch,
v - je diskontný faktor.

Výraz $\frac{i}{1-v^n}$ nazveme **umorovateľ**, ktorý udáva výšku polehotnej anuity potrebnej k tomu, aby sa zaplatil jednotkový úver za n období pri úrokovej sadzbe n.

V nasledujúcej časti si ukážeme, ako sa zostavuje umorovací plán pri konštantných anuitách. K zostaveniu umorovacieho plánu potrebujeme poznať okrem hodnoty anuity aj hodnoty úmoru a úroku.

Počiatočnú hodnotu úveru D označíme D_0. Z prvej anuity pripadá na úrok U_1 čiastka $D_0 \cdot i$, úrok potom môžeme vyjadriť:

$$U_1 = D_0 \cdot i = a \cdot (1 - v^n) \, .$$

Na úmor úveru M_1 potom zostáva čiastka:

$$M_1 = a - U_1 = a - \ a \cdot (1 - v^n) = a \cdot v^n \ .$$

Stav úveru po zaplatení prvej splátky teda bude:

$$D_1 = D_0 - M_1 = D_0 - \ a \cdot v^n \ .$$

Predpokladajme teraz, že po zaplatení *r* splátok (po *r* rokoch) má zostatok úveru hodnotu D_r . Pre výšku úroku v období $r + 1$ platí:

$$U_{r+1} = D_r \cdot i = a \cdot (1 - v^{n-r}) \, .$$

Výška úmoru má hodnotu:

$$M_{r+1} = a - D_r \cdot i = a \cdot v^{n-r} \ .$$

Pretože jednotlivé úmory tvoria geometrickú postupnosť s kvocientom $q = 1 + i$, môžeme výšku úmoru v $r + 1$ období vypočítať z rovnice:

$$M_{r+1} = M_r \cdot (1 + i) \ .$$

Využitím uvedených vzťahov môžeme zostaviť **UMOROVACÍ PLÁN**.

obdobie r	anuita a	úrok U_r	úmor M_r	zostatok úveru D_r
0				D
1	a	$a \cdot (1 - v^n)$	$a \cdot v^n$	$D - M_1$
2	a	$a \cdot (1 - v^{n-1})$	$a \cdot v^{n-1}$	$D_1 - M_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	a	$a \cdot \left(1 - v^{n-(r-1)}\right)$	$a \cdot v^{n-(r-1)}$	$D_{r-1} - M_r$
r+1	a	$a \cdot (1 - v^{n-r})$	$a \cdot v^{n-r}$	$D_r - M_{r+1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-1	a	$a \cdot (1 - v^2)$	$a \cdot v^2$	$D_{n-2} - M_{n-1}$
n	a	$a \cdot (1 - v)$	$a \cdot v$	0

5.2 Splácanie úveru vopred danou konštantnou anuitou

V predchádzajúcej časti sme hľadali rovnice pre splatenie úveru D pri úrokovej sadzbe i a danej dobe splatnosti n. Na základe týchto troch veličín sme dopočítali veľkosť konštantnej anuity a.

V praxi sa často stretávame s prípadmi, keď úver D s úrokovou sadzbou i chce klient splácať vopred danou konštantnou anuitou a. Tento prípad umorovania dlhu je bežnejší.

V takomto prípade potrebujeme určiť počet dopredu daných konštantných anuít a veľkosť poslednej splátky. Musíme určiť ako dlho sa bude úver splácať, teda n a aká veľká bude posledná splátka , ktorá splatí zvyšok úveru.

Opäť budeme vychádzať zo vzťahu pre súčasnú hodnotu dôchodku:

$$D = a \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i} \ .$$

Odkiaľ pomocou ekvivalentných úprav a následným zlogaritmovaním dostaneme:

$$n = \frac{ln\left(1 - \frac{D \cdot i}{a}\right)}{\ln v} \ ,$$

kde
D – je súčasná hodnota dôchodku,
a – je splátka (anuita),
i – je ročná úroková sadzba,
n – doba splatnosti v rokoch,
v - je diskontný faktor.

Vypočítame dobu splatnosti n. Ak je vypočítané n celé číslo, tak doba splatnosti je ukončený počet úrokovacích období, potom ďalej pokračujeme ako v predchádzajúcej časti. Úver je splácaný n konštantnými anuitami.

Ak n nie je celé číslo, tak určíme n_0, čo je celočíselná časť doby splatnosti n. Úver potom splácame $n_0 + 1$ splátkami, kde n_0 má hodnotu a a posledná splátka bude mať hodnotu b a jej hodnota bude menšia ako a.

Súčasnú hodnotu vypočítame z rovnice:

$$D = a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i} + b \cdot v^{n_0+1} \ .$$

Ekvivalentnými úpravami vyjadríme poslednú splátku b ako:

$$b = \left(D - a \cdot \frac{1 - v^{n_0}}{i}\right) \cdot (1+i)^{n_0+1} \ .$$

Posledná splátka sa tiež skladá z úmoru a úroku.

Stav úveru po n_0-tej splátke má hodnotu $b \cdot v$. Posledná výška úmoru má rovnako výšku $b \cdot v$ teda:

$$M_{n_0+1} = b \cdot vU_{n_0+1} = b \cdot v \cdot i$$

5.3 Splácanie úveru nerovnakými splátkami (konštantný úmor)

Daný úver D má byť splácaný aj s úrokmi n splátkami splatnými vždy koncom úrokovacieho obdobia pri nemennej ročnej úrokovej sadzbe i. Každá splátka sa skladá z konštantného úmoru $\frac{D}{n}$ a premenlivého úroku, ktorý sa znižuje v závislosti od zostatku úveru.

Úmory majú hodnotu:

$$M_1 = M_2 = M_3 = \cdots = M_n = \frac{D}{n} \ .$$

Pôvodný stav úveru vyjadríme:

$$D_0 = n \cdot \frac{D}{n} \ .$$

Úrok v prvom období má hodnotu:

$$U_1 = D_0 \cdot i = \ n \cdot \frac{D}{n} \cdot i \quad .$$

Pri tomto spôsobe tvoria jednotlivé platby aritmetickú postupnosť, ktorej diferencia má hodnotu rozdielu dvoch po sebe idúcich platieb:

$$d = U_1 - U_2 = n \cdot \frac{D}{n} \cdot i - (n-1) \cdot \frac{D}{n} \cdot i = \frac{D}{n} \cdot i \ .$$

Pretože jednotlivé úrokové platby tvoria aritmetickú postupnosť a úmory sú konštantné, tvoria aj celkové splátky v jednotlivých obdobiach aritmetickú postupnosť s rovnakou diferenciou.

Využitím uvedených vzťahov môžeme zostaviť **UMOROVACÍ PLÁN**.

obdobie $\boldsymbol{r}$	**anuita** $\boldsymbol{a}$	**úrok** $\boldsymbol{U_r}$	**úmor** $\boldsymbol{M_r}$	**zostatok úveru** $\boldsymbol{D_r}$
0				$n \cdot \frac{D}{n}$
1	$\frac{D}{n} \cdot (n \cdot i + 1)$	$n \cdot \frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	$(n-1) \cdot \frac{D}{n}$
2	$\frac{D}{n} \cdot [(n-1) \cdot i + 1]$	$(n-1) \cdot \frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	$(n-2) \cdot \frac{D}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{r}$	$\frac{D}{n} \cdot [(n-r+1) \cdot i + 1]$	$(n-r+1) \cdot \frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	$(n-r) \cdot \frac{D}{n}$
$\boldsymbol{r+1}$	$\frac{D}{n} \cdot [(n-r) \cdot i + 1]$	$(n-r) \cdot \frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	$(n-r-1) \cdot \frac{D}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boldsymbol{n-1}$	$\frac{D}{n} \cdot (2 \cdot i + 1)$	$2 \cdot \frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	$\frac{D}{n}$
$\boldsymbol{n}$	$\frac{D}{n} \cdot (i + 1)$	$\frac{D}{n} \cdot i$	$\frac{D}{n}$	0

Použitá a odporúčaná literatúra

1. RADOVÁ, J. – DVOŘÁK, P. – MÁLEK, J.: *Finanční matematika pro každého* (6. aktualizované vydání). Praha: GRADA Publishing 2007. 293 s. ISBN 978-80-247-2233-7.

2. RADOVÁ, J. a kol.: *Finanční matematika pro každého příklady*. Praha: GRADA Publishing 2008. ISBN 978-80-247-2346-8.

3. URBANÍKOVA, M.: *Finančná matematika*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre 2008. ISBN 978-80-8094-387-5.

4. PIRČ, V. – SEDLÁČKOVÁ, A.: *Finančná matematika*. Košice: Technická univerzita Košice 2002.

„Moderné vzdelávanie pre vedomostnú spoločnosť / Projekt je spolufinancovaný zo zdrojov EÚ“